VECTORES

Ejercicios resueltos. Curso de Física COU. A. Peña, F. Garzo

Ejercicio resuelto 1, p21.

Halla el vector unitario perpendicular al plano formado por los vectores **u** = 2 i - 6 j - 3 k y **v** = 4 i + 3 j - k.

In[∘]:=
```
Clear["Global`*"]
```
borra

Definimos los vectores:

In[∘]:=
```
u = {2, -6, -3};
v = {4, 3, -1};
```

Su producto vectorial será un vector perpendicular al plano formado los vectores

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (2, -6, -3) \times (4, 3, -1) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculado será:

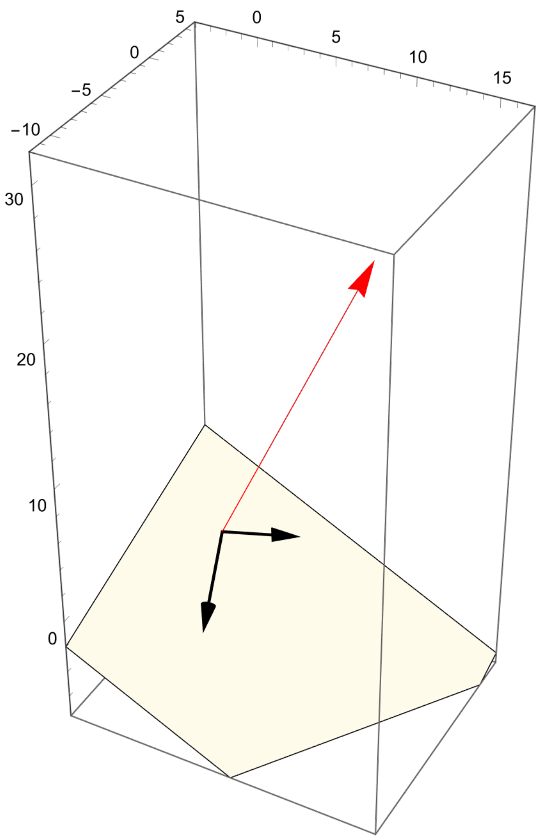
In[∘]:=
```
w = Cross[u, v]
```
producto vectoria

Out[∘]=
```
{15, -10, 30}
```

Si representamos gráficamente el vector producto vectorial **w**, veremos que es perpendicular al plano formado por los vectores **u** y **v**:

In[ ]:=
```
Graphics3D[{Black, Arrow[Tube[{{0, 0, 0}, u}]],
gráfico 3D     negro    flecha  tubo
  Arrow[Tube[{{0, 0, 0}, v}]], Red, Arrow[{{0, 0, 0}, w}], White,
  flecha  tubo                 rojo  flecha                 blanco
  InfinitePlane[{0, 0, 0}, {u, v}]}, Axes → True, PlotRangePadding → 2]
  plano infinito                      ejes   verd⋯  extensión del rango de represent
```

Out[ ]=



Podemos verificar que el resultado es perpendicular a ambos vectores, aplicando la condición de perpendicularidad. El producto escalar de los vectores es igual a cero.

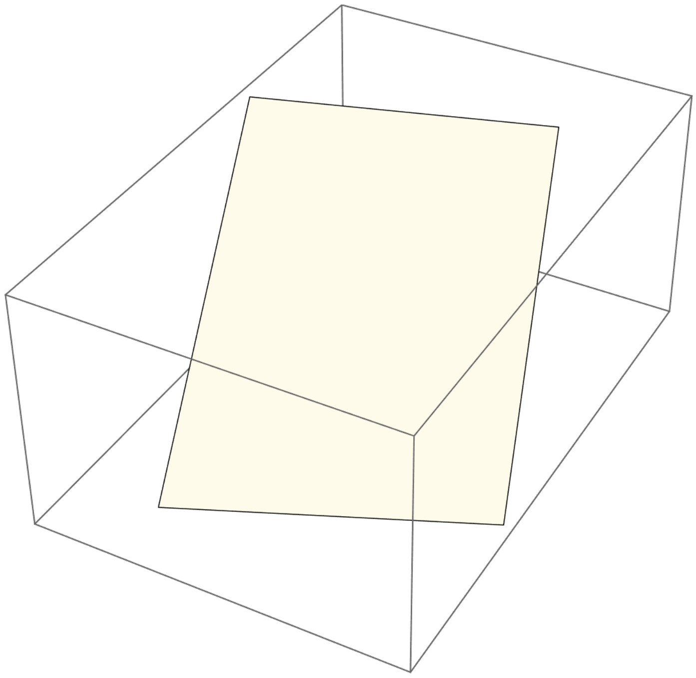
In[ ]:=
```
{w.u, w.v}
```

Out[ ]=
```
{0, 0}
```

También podemos visualizar el área del paralelepípedo formado por los vectores u y v:

In[ ]:=
```
Graphics3D[Parallelepiped[{0, 0, 0}, {u, v}]]
```
gráfico 3D paralelepípedo

Out[ ]=



La ecuación del plano formado por los vectores u, v será:

In[ ]:=
```
w.{x, y, z} == 0
```

Out[ ]=

$15x - 10y + 30z == 0$

Aprovechamos para calcular **el área del paralelogramo** definido por los vectores. Será el módulo del vector, producto vectorial resultante de los vectores **u** y **v**:

In[ ]:=
```
Norm[u×v]
```
norma

Out[ ]=

35

Como lo que se quiere es calcular un vector unitario en la dirección y sentido del vector producto vectorial. Es decir **w** = | w | **u.** Tendremos que dividir el vector por su módulo: u $= \frac{w}{|w|}$

In[ ]:=

$$\frac{w}{\text{Norm}[u \times v]}$$

Out[ ]=

$$\left\{\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right\}$$

____

_

Ejercicio resuelto 2, p22.

Un sólido rígido gira alrededor de un eje que pasa por O con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Demostrar que la velocidad lineal **v** de un punto P del sólido cuyo vector de posición es **r**, viene dada por **v** =

ω x **r**, siendo ***ω*** un vector de módulo ω y cuya dirección y sentido son los del avance de un sacacorchos que gira en el sentido del movimiento. (Fig. 1.21)

In[ ]:=
```
Clear["Global`*"]
```
borra

In[6]:=
```
Import[
 "/Users/miguelseguramatarredona/Documents/Ciencia/Mathematica/Imágenes/sólido rígido.png"]
```
importa

Out[6]=

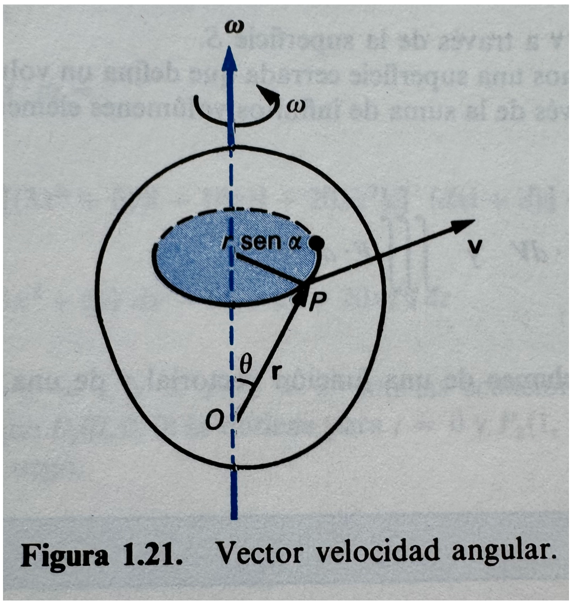


Figura 1.21. Vector velocidad angular.

Como el punto P describe una circunferencia de radio r sen θ, el módulo de la velocidad lineal **v** es:

$|v| = \omega\ (r \operatorname{sen} \theta) = |\omega \times r|$

Por tanto el vector **v** es perpendicular a los vectores ***ω*** y **r** de tal forma que los tres componen un triedro a derechas. Luego **v** tiene el mismo módulo, dirección y sentido que ***ω*** x **r**. El vector ***ω*** se llama velocidad angular.

____

_

Ejercicio resuelto 3, p22.

Una partícula se mueve a lo largo de una curva cuyas ecuaciones paramétricas son: $x = e^{-t}$, $y = 2 \cos(3t)$ y $z = 2 \operatorname{sen}(3t)$. Donde t representa el tiempo. Se pide: a) Halla la velocidad y aceleración en función del tiempo. b) Halla el módulo de la velocidad y la aceleración en el instante t = 0.

In[ ]:=
```
Clear["Global`*"]
```
borra

En primer lugar definimos el vector **r**, posición de la partícula:

$\mathbf{r} = (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})$

Su construcción será a partir de:

In[ ]:=
```
u = {i, j, k};
```

In[ ]:=
```
c = {Exp[-t], 2 Cos[3 t], 2 Sin[3 t]};
     exponencial  coseno      seno
```

El producto escalar del vector **u** por el escalar c, me da el vector posición **r**:

In[ ]:=
```
r = c.u
```

Out[ ]=

$e^{-t}\, i + 2\, j\, \text{Cos}[3\, t] + 2\, k\, \text{Sin}[3\, t]$

La velocidad de la partícula vendrá dada por **v** = dr/dt:

In[ ]:=
```
v = D[r, t]
    deriva
```

Out[ ]=

$-e^{-t}\, i + 6\, k\, \text{Cos}[3\, t] - 6\, j\, \text{Sin}[3\, t]$

La aceleración vendrá dada por **a** = dv/dt:

In[ ]:=
```
a = D[v, t]
    deriva
```

Out[ ]=

$e^{-t}\, i - 18\, j\, \text{Cos}[3\, t] - 18\, k\, \text{Sin}[3\, t]$

La velocidad y la aceleración en el instante t = 0:

In[ ]:=
```
v /. t → 0
```

Out[ ]=

$-i + 6\, k$

In[ ]:=
```
a /. t → 0
```

Out[ ]=

$i - 18\, j$

Los módulos de la velocidad y la aceleración en el instante t = 0:

In[ ]:=
```
v = {-1, 0, 6};
```

In[ ]:=
```
a = {1, -18, 0};
```

In[ ]:=
```
Norm[v]
norma
```

Out[ ]=

$\sqrt{37}$

In[ ]:=
```
Norm[a]
norma
```

Out[ ]=

$5\, \sqrt{13}$

Ejercicio resuelto 4, p22.

El vector de posición de una partícula en movimiento viene dado por **r** = cos wt **i** + sen wt **j** donde w es una constante. Se pide: a) Demostrar que la velocidad **v** de un partícula es perpendicular a **r**.

b) Demostrar que la aceleración **a** está dirigida hacia el origen y su módulo es proporcional a su distancia al mismo. c) Demostrar que el vector **r** x **v** es constante.

In[∘]:=
```
Clear["Global`*"]
borra
```

En primer lugar definimos el vector **r:**

In[∘]:=
```
r = Cos[w t] i + Sin[w t] j;
    coseno       seno
```

Escribiéndolo en formato de vector para cálculo:

In[∘]:=
```
r = {Cos[w t], Sin[w t]};
     coseno    seno
```

Podemos calcular la velocidad **v** = d**r**/dt, luego:

In[∘]:=
```
v = D[r, t]
    deriva
```

Out[∘]=
```
{-w Sin[t w], w Cos[t w]}
```

Como tienen que ser perpendiculares, se tiene que cumplir **v** · **r** = 0

In[∘]:=
```
v = {-w Sin[w t], w Cos[w t]};
        seno        coseno
```

In[∘]:=
```
Dot[v, r]
producto escalar
```

Out[∘]=
```
0
```

En el segundo caso tenemos que calcular la aceleración es a = d^2**r**/dt ^{2} = d**v**/dt:

In[∘]:=
```
a = D[v, t]
    deriva
```

Out[∘]=
$\{-w^2 \text{Cos}[t\, w], -w^2 \text{Sin}[t\, w]\}$

Como **a** = $-w^2$ r, tenemos:

$-w^2 \cos[t\, w] - w^2 \text{sen}[t\, w] = -w^2\, r$

$-w^2\, [\cos[t\, w] + \text{sen}[t\, w]] = -w^2\, r$

Luego el vector aceleración tiene la misma dirección que el vector de posición, aunque sentido contrario, y por tanto está dirigido hacia el origen de coordenadas. También observamos que su módulo es proporcional a | **r** |, que es la distancia al origen, siendo - w^2 la constante de proporcionalidad.

Para demostrar que **r** x **v** = cte. hacemos su producto vectorial:

$$[\cos[w\, t]\, \mathbf{i}, \text{sen}[w\, t]\, \mathbf{j}] \times [-w\ \text{sen}[t\, w]\, \mathbf{i} + w\ \cos[t\, w]\, \mathbf{j}] = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos wt & \text{sen}\, wt & 0 \\ -w\, \text{sen}\, wt & w \cos wt & 0 \end{pmatrix}$$

=

w ($\cos^2$ w t + sen^2 w t) **k** = w 1 k = w k

Definimos vectores r y v en tres dimensiones para el cálculo:

In[∘]:=
```
r = {Cos[w t], Sin[w t], 0};
     coseno    seno
```

In[∘]:=
```
v = {-w Sin[w t], w Cos[w t], 0};
        seno        coseno
```

In[∘]:=
```
Cross[r, v]
producto vectorial
```

Out[∘]=
```
{0, 0, w Cos[t w]^2 + w Sin[t w]^2}
```

Físicamente se trata del movimiento de una partícula alrededor de una circunferencia con una velocidad angular constante ω. La aceleración que está dirigida hacia el centro de la circunferencia se llama aceleración centrípeta.

____

_

Ejercicio resuelto 5, p23.

Calcular el valor de $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{r})$ siendo **r** un vector de posición genérico y **A** un vector tal que $\nabla \times \mathbf{A} = 0$.

In[∘]:=
```
Clear["Global`*"]
borra
```

Definimos los vectores matemáticamente:

In[∘]:=
```
A = Ax i + Ay j + Az k;
r = x i + y j + z k;
```

Definimos los vectores para cálculo en Mathematica:

In[∘]:=
```
A = {Ax , Ay, Az };
r = {x , y , z };
```

El producto vectorial **A** x **r**:

In[∘]:=
```
v = Cross[A, r]
    producto vectorial
```

Out[∘]=
```
{-Az y + Ay z, Az x - Ax z, -Ay x + Ax y}
```

Por consiguiente $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{r})$ sería calcular la divergencia del vector **v**:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{r}) = (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}) \cdot \left[x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - x\,\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathrm{i} + y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - x\,\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathrm{j} + z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - x\,\frac{\partial A_{zx}}{\partial y}\right)k\right] =$$

$$= \mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{r} \cdot \text{rot}(\mathbf{A}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

In[ ]:=
```
Div[v, {x, y, z}]
```
divergencia

Out[ ]=
```
0
```

____

_

Ejercicio resuelto 6, p23.

Calcula el trabajo total que es necesario realizar para desplazar una partícula en un campo de fuerzas dado por
F = 3 x y **i** - 5 z **j** + 10 x **k** a lo largo de la curva C de coordenadas: $x = t^2 + 1$, $y = 2\ t^2$, $z = t^3$.

In[ ]:=
```
Clear["Global`*"]
```
borra

Calcularemos el trabajo total a través de la circulación del vector que define el campo de fuerzas:

$$T = \int F\, dr = \int (3\,x\,y\,i - 5\,z\,j + 10\,x\,k)\,\left(dx\,i + dy\,j + dz\,k\right) =$$

$$\int 3\,x\,y\,dx - 5\,z\,dy + 10\,x\,dz =$$

$$= \int_{t=1}^{t=2} 3\left(t^2+1\right)\left(2\,t^2\right) d\left(t^2+1\right) - 5\,t^3\,d\left(2\,t^2\right) + 10\left(t^2+1\right) d\,t^3 =$$

$$= \int_{t=1}^{t=2} \left(12\,t^5 + 12\,t^3 - 20\,t^4 + 30\,t^4 + 30\,t^2\right) dt =$$

$$= \int_{t=1}^{t=2} \left(12\,t^5 + 10\,t^4 + 12\,t^3 + 30\,t^2\right) dt =$$

$$\frac{12\,t^6}{6} + \frac{10\,t^5}{5} + \frac{12\,t^4}{4} + \frac{30\,t^3}{3} = 303$$

Definimos la fuerza, y la curva para cálculo con Mathematica:

In[ ]:=
```
F = {3 x y , -5 z , 10 x };
r = {dx , dy , dz };
```

El producto escalar F · r:

In[ ]:=
```
pe = Dot[F, r]
```
producto esca

Out[ ]=
```
10 dz x + 3 dx x y - 5 dy z
```

Calculamos las derivadas de x, y, z en la curva C:

In[ ]:=
```
dx = D[t^2 + 1, t]
```
deriva

Out[ ]=
```
2 t
```

In[ ]:=
```
dy = D[2 t^2, t]
```
deriva

Out[ ]=

$4\,t$

In[ ]:=
```
dz = D[t^3, t]
```
deriva

Out[ ]=

$3\,t^2$

Particularizando el producto escalar para los valores de C:

In[ ]:=
```
pep = pe /. {x → t^2 + 1, y → 2 t^2, z → t^3, dx → 2 t, dy → 4 t, dz → 3 t^2}
```

Out[ ]=

$-20\,t^4 + 30\,t^2\,(1 + t^2) + 12\,t^3\,(1 + t^2)$

In[ ]:=

$\int_1^2 pep \, dt$

Out[ ]=

303