VECTORES

Ejercicios de aplicación. Curso de Física COU. A. Peña, F. Garzo

Ejercicio de aplicación 3, p6.

Dados los vectores: **u1** = 2i - j + k, **u2** = i + 3j - 2k, **u3** = - 2i + j - 3k, **u4** = 3i + 2j + 5k. Halla los valores de los escalares a, b , c de forma que **u4** = a **u1** + b **u2** + c **u3**.

In[∘]:=
```
Clear["Global`*"]
```
borra

Hay que expresar el vector u4 en función de los tres vectores restantes:

In[∘]:= 3 i + 2 j + 5 k = a (2 i - j + k) + b (i + 3 j - 2 k) + c (-2 i + j - 3 k)

Agrupar por componentes:

In[∘]:= 3 i + 2 j + 5 k = (2 a + b - 2 c) i + (-a + 3 b + c) j + (a - 2 b - 3 c) k

Identificando componentes resulta el sistema de ecuaciones:

2 a + b - 2 c =3
- a + 3b + c = 2
a - 2b -3c = 5

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

In[∘]:=
```
Solve[{2 a + b - 2 c == 3, -a + 3 b + c == 2, a - 2 b - 3 c == 5}]
```
resuelve

Out[∘]=
```
{{a → -2, b → 1, c → -3}}
```

Es decir que u4 expresado como combinación lineal de los vectores u1, u2, u3, queda:

u4 = -2 u1 + u2 - 3 u3

Los vectores u1, u2, u3 no son coplanarios ni paralelos y, por tanto son linealmente independientes y constituyen una base del espacio vectorial. Los valores hallados (- 2, 1, - 3) son las coordenadas del vector u4
en esa base.

Ejercicio de aplicación 4, p8.

Dados los vectores: **u** = 2i + 2j - k, **v** = 6i - 3j + 2k, calcula:
a) El ángulo que forman.
b) La proyección de **u** sobre la dirección de **v**.

In[∘]:=
```
Clear["Global`*"]
```
borra

Para calcular el ángulo que forman los vectores, hay que partir de la definición del producto escalar de dos vectores:

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |u|\,|v| \cos\alpha$, despejando $\cos\alpha = \frac{u \cdot v}{|u|\,|v|}$

Definimos los vectores:

In[∘]:=
```
u = {2, 2, -1};
```

In[∘]:=
```
v = {6, -3, 2};
```

Hacemos los cálculos:

In[∘]:=
```
Norm[u]
```
norma

Out[∘]=

3

In[∘]:=
```
Norm[v]
```
norma

Out[∘]=

7

In[∘]:=
```
Dot[u, v]
```
producto escalar

Out[∘]=

4

El ángulo será:

In[∘]:= $\text{ArcCos}\left[\frac{\text{Dot}[u, v]}{\text{Norm}[u]\ \text{Norm}[v]}\right]$

arco coseno

Out[∘]=

$\text{ArcCos}\left[\frac{4}{21}\right]$

En grados:

In[∘]:= $\text{ArcCos}\left[\frac{4}{21}\right] * \frac{180}{\pi}$ // N

arco coseno — valor numérico

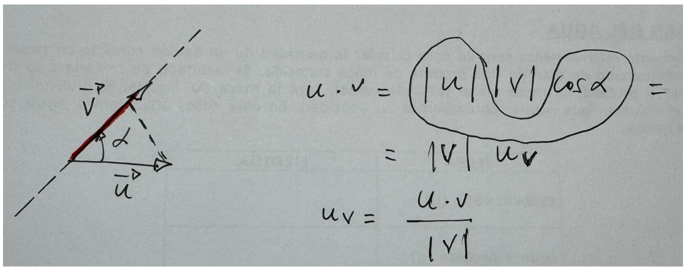
Out[∘]=

79.0194

La proyección ortogonal de **u** sobre la dirección de **v:**

In[1]:=
```
Import[
"/Users/miguelseguramatarredona/Documents/Ciencia/Mathematica/Imágenes/u sobre v.png"]
```

Out[1]=



In[ ]:=

$$uv = \frac{\texttt{Dot[u, v]}}{\texttt{Norm[v]}} \; // \; N$$

Out[ ]=

```
0.571429
```

Ejercicio de aplicación 5, p11.

Dados los vectores: **a** = 2i - 3j + k, **b** = - i + 2j - 5k, calcula:

a) El momento del vector **a** aplicado en O (0, 0, 0), respecto del punto P (- 2, 1, 0).

b) El momento del vector **b**, aplicado en A (-1, 2, 3), respecto del eje e definido por la ecuación:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-1}$$

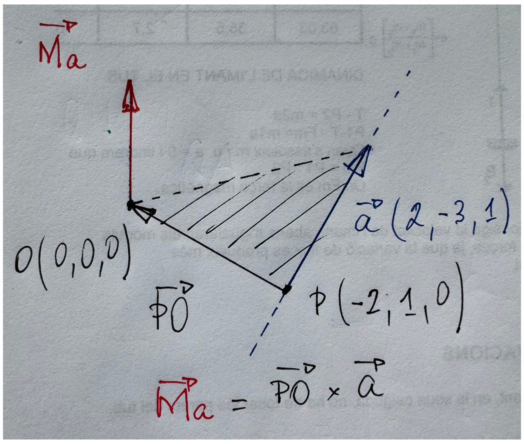
In[ ]:=
```
Clear["Global`*"]
```

Definimos los vectores:

In[ ]:=
```
a = {2, -3, 1};
b = {-1, 2, -5};
```

In[2]:=
```
Import[
 "/Users/miguelseguramatarredona/Documents/Ciencia/Mathematica/Imágenes/
   momento vector_01.png"]
```
importa

Out[2]=



El momento del vector **a** aplicado en O con respecto al punto P, **Ma** viene dado:

PO = (0 - (-2), 0 - 1, 0 - 0) = (2, -1, 0)

Ma = **PO** x **a** = (0 - (-2), 0 - 1, 0 - 0) x (2, -3, 1) = (2, -1, 0) x (2, -3, 1) = $\begin{pmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

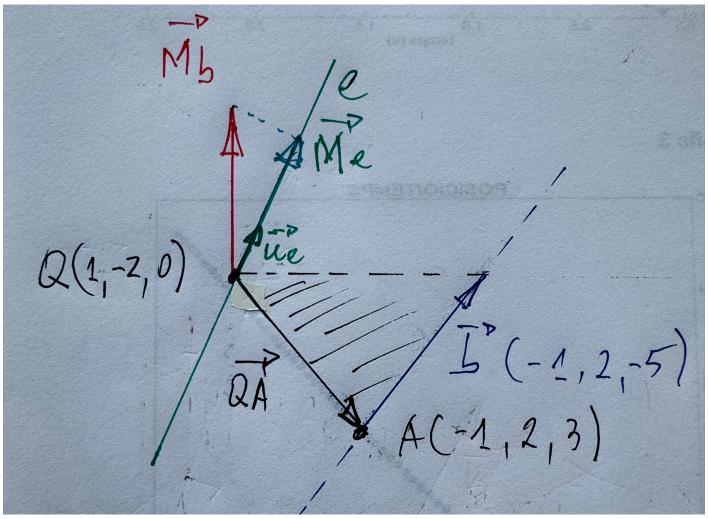
In[ ]:=
```
PO = {2, -1, 0};
```

In[ ]:=
```
Ma = Cross[PO, a]
```
producto vectorial

Out[ ]=
```
{-1, -2, -4}
```

In[3]:=
```
Import[
 "/Users/miguelseguramatarredona/Documents/Ciencia/Mathematica/Imágenes/
   momento vector_02.png"]
```
importa

Out[3]=



Para el caso b), como tenemos la ecuación contínua de la recta del eje: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-1}$

Deducimos un punto del eje Q (1, -2, 0). Entonces el momento del vector **b** (-1, 2, -5) respecto del eje **e**, es igual al momento de **b** aplicado en A (-1, 2, 3) respecto de Q (1, -2, 0) y proyectado sobre el eje e.

QA = (-1 - 1, 2 - (-2), 3 - 0) = (-2, 4, 3)

Mb = **QA** x **b** = (-2, 4, 3) x (- 1, 2, - 5) = $\begin{pmatrix} i & j & k \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

In[ ]:=
```
QA = {-2, 4, 3};
```

In[ ]:=
```
Mb = Cross[QA, b]
```
producto vectorial

Out[ ]=

{-26, -13, 0}

Y ahora calculamos la proyección de ese vector sobre el eje. Un vector paralelo al eje se deduce de su ecuación: (2, 3, - 1) y un vector unitario con esa dirección será: $u = \frac{v}{|v|}$

In[ ]:=
```
v = {2, 3, -1};
```

In[ ]:=
$$ue = \frac{v}{\text{Norm}[v]}$$

Out[ ]=

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{7}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}\right\}$$

Por tanto, el momento del vector sobre el eje e, **Me** es el escalar que representa la proyección del vector momento **Mb** sobre el eje y mide el momento del vector **b** aplicado en A respecto de e.

In[ ]:=
```
Me = Dot[Mb, ue]
```
producto escalar

Out[ ]=

$$-26\sqrt{\frac{2}{7}} - \frac{39}{\sqrt{14}}$$

Ejercicio de aplicación 6, p13.

Una partícula se mueve a lo largo de la curva S, cuyas ecuaciones paramétricas son:

$x = 2t^2$

$y = t^2 - 4t$

$z = 3t - 5$

Siendo t el tiempo. Calcula las componentes de la velocidad y de la aceleración en el instante t = 1 y en la dirección del vector w = i - 3 j + 2 k

In[ ]:=
```
Clear["Global`*"]
```
borra

Escribimos el vector dado w y la curva S en forma vectorial:

In[∘]:=
```
w = {1, -3, 2};
```

In[∘]:=
$$s = \{2\,t^2,\ t^2 - 4\,t,\ 3\,t - 5\};$$

Calculemos la velocidad v como la derivada del vector de posición S respecto al tiempo:

In[∘]:=
$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{t}\left(2\,t^2\,i + \left(t^2 - 4\right)\,j + (3\,t - 5)\,k\right)$$

In[∘]:=
```
v = D[s, t]
```
deriva

Out[∘]=
$$\{4\,t,\ -4 + 2\,t,\ 3\}$$

Particularizando la velocidad para t = 1:

In[∘]:=
$$v_t = v\ /.\ t \to 1$$

Out[∘]=
$$\{4,\ -2,\ 3\}$$

Necesitamos calcular el vector unitario en la dirección del vector i - 3 j + 2 k. Para ello tenemos que saber que el vector unitario es: $u = \frac{w}{|w|}$

In[∘]:=
$$u_w = \frac{w}{\text{Norm}[w]}$$

Out[∘]=
$$\left\{\frac{1}{\sqrt{14}},\ -\frac{3}{\sqrt{14}},\ \sqrt{\frac{2}{7}}\right\}$$

La componente de la velocidad en la dirección del vector w será el producto escalar del vector velocidad v por el vector unitario u_w:

In[∘]:=
$$\text{Dot}[v_t,\ u_w]$$
producto escalar

Out[∘]=
$$8\,\sqrt{\frac{2}{7}}$$

El vector aceleración:

$$a = \frac{d^2\,S}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dS}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\,(4\,t\,i + (2\,t - 4)\,j + 3\,k)$$

In[∘]:=
```
a = D[v, t]
```
deriva

Out[∘]=
$$\{4,\ 2,\ 0\}$$

La aceleración en la dirección del vector w, es el producto escalar de la aceleración por el vector unitario u_w:

In[ ]:=
```
Dot[a, uw]
```
producto escalar

Out[ ]=

$$-\sqrt{\frac{2}{7}}$$

Ejercicio de aplicación A-1, p15.

Siendo v una función vectorial de dos variables escalares dadas por:

$v\,(x, y) = (2\,x^2 y - x^4)\ i\ +\ (e^{x\,y} - y \text{ sen } x)\ j\ +\ (x^2 \cos y)\ k$, calcula:

a) $\frac{\partial v}{\partial x}$; b) $\frac{\partial v}{\partial y}$; c) $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$; d) $\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}$; e) $\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}$

In[ ]:=
```
Clear["Global`*"]
```
borra

Escribimos la función vectorial:

In[ ]:=
```
v = {2 x^2 y - x^4, E^(x y) - y Sin[x], x^2 Cos[y]};
```
número e, seno, coseno

El primer apartado $\frac{\partial v}{\partial x}$:

In[ ]:=
```
D[v, x]
```
deriva

Out[ ]=

$$\{-4\,x^3 + 4\,x\,y,\ e^{x\,y}\,y - y\,\text{Cos}[x],\ 2\,x\,\text{Cos}[y]\}$$

El apartado b) calculamos $\frac{\partial v}{\partial y}$:

In[ ]:=
```
D[v, y]
```
deriva

Out[ ]=

$$\{2\,x^2,\ e^{x\,y}\,x - \text{Sin}[x],\ -x^2\,\text{Sin}[y]\}$$

El apartado c) calculamos $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$:

In[ ]:=
```
D[v, {x, 2}]
```
deriva

Out[ ]=

$$\{-12\,x^2 + 4\,y,\ e^{x\,y}\,y^2 + y\,\text{Sin}[x],\ 2\,\text{Cos}[y]\}$$

El apartado d) calculamos $\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}$:

In[ ]:=
```
D[v, x, y]
```
deriva

Out[ ]=

$$\{4\,x,\ e^{x\,y} + e^{x\,y}\,x\,y - \text{Cos}[x],\ -2\,x\,\text{Sin}[y]\}$$

El apartado e) calculamos $\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}$

In[•]:=
```
D[v, y, x]
deriva
```

Out[•]=

$\{4\,x,\ e^{x\,y} + e^{x\,y}\,x\,y - \text{Cos}[x],\ -2\,x\,\text{Sin}[y]\}$

Siempre que la función v tenga derivadas parciales de primer y segundo orden contínuas, ocurrirá que:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}$$

Ejercicio de aplicación A-2, p16.

Halla un vector unitario que sea normal a la superficie equiescalar: x^2 y + 2 x z = 4 en el punto P (2, -2, 3).

In[•]:=
```
Clear["Global`*"]
borra
```

In[5]:=
```
Import[
importa
 "/Users/miguelseguramatarredona/Documents/Ciencia/Mathematica/Imágenes/vector
   gradiente.png"]
```

Out[5]=

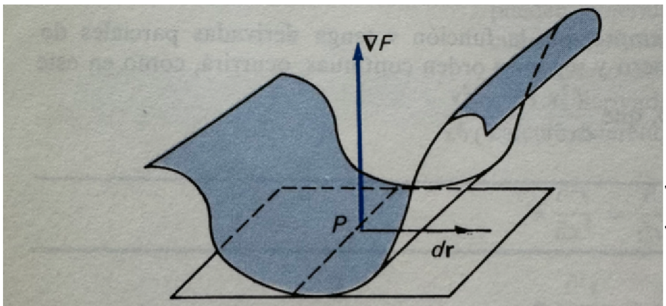


Figura 1.15. El vector gradiente es perpendicular a la superficie equiescalar.

Calculamos el gradiente a la superficie x^2 y + 2 x z = 4 en el punto P (2, - 2, 3).
Es decir: grad F = ∇ F = $\left(\frac{\partial}{\partial_x} i + \frac{\partial}{\partial_y} j + \frac{\partial}{\partial_z} k\right) F = \left(\frac{\partial F}{\partial_x} i + \frac{\partial F}{\partial_y} j + \frac{\partial F}{\partial_z} k\right)$

Definimos la superficie:

In[•]:=
```
f[x_, y_, z_] = x^2 y + 2 x z;
```

Calculamos el gradiente:

In[•]:=
```
grad = Grad[f[x, y, z], {x, y, z}]
       gradiente
```

Out[•]=

$\{2\,x\,y + 2\,z,\ x^2,\ 2\,x\}$

Particularizamos el gradiente para el punto P (2, - 2, 3):

In[ ]:=
```
gradP = grad /. {x → 2, y → -2, z → 3}
```
Out[ ]=
```
{-2, 4, 4}
```

Luego el vector gradiente queda como -2i + 4j + 4k. Un vector unitario normal a la superficie sera: ∇ F = |∇ F| . u , luego el vector unitario es: u $= \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$

In[ ]:=
```
u = gradP / Norm[gradP] // N
```
Out[ ]=
```
{-0.333333, 0.666667, 0.666667}
```

Ejercicio de aplicación A-3, p17.

Dado el vector v = x^2 z i - 2 y^3 z^2j + x y^2 z k , halla su divergencia en el punto P (1, -1, 1).

In[ ]:=
```
Clear["Global`*"]
```
borra

Se define la divergencia del vector v al escalar que resulta del producto escalar de nabla por el vector:

$$\text{div } v = \nabla . v = \left(\frac{\partial}{\partial_x} i + \frac{\partial}{\partial_y} j + \frac{\partial}{\partial_z} k\right) . \left(v_x\, i + v_y\, j + v_z\, k\right) = \left(\frac{\partial v_x}{\partial_x} + \frac{\partial v_y}{\partial_y} + \frac{\partial v_z}{\partial_z}\right)$$

Definimos el vector v:

In[ ]:=
```
v = {x^2 z, - 2 y^3 z^2, x y^2 z};
```

Calculamos la divergencia de v:

In[ ]:=
```
div = Div[v, {x, y, z}]
```
divergencia

Out[ ]=
$x\, y^2 + 2\, x\, z - 6\, y^2\, z^2$

Particularizando para el punto P(1, -1, 1):

In[ ]:=
```
divP = div /. {x → 1, y → -1, z → 1}
```
Out[ ]=
```
-3
```

Ejercicio de aplicación A-4, p18.

Halla el rotacional del vector v = $x\, z^3$ i - 2 x^2 $y\, z$ j + 2 y z^4 k en el punto P (1, - 1, 1).

In[ ]:=
```
Clear["Global`*"]
```
borra

Se define el rotacional del vector **v** al vector que resulta del producto vectorial de nabla por el vector:

$$\text{rot } V = \nabla \times V = \left(\frac{\partial}{\partial_x} i + \frac{\partial}{\partial_y} j + \frac{\partial}{\partial_z} k\right) \times (v_x\, i + v_y\, j + v_z\, k) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix}$$

Definimos el vector v:

In[ ]:=
```
v = {x z^3, - 2 x^2 y z, 2 y z^4};
```

Calculamos el rotacional de v:

In[ ]:=
```
rot = Curl[v, {x, y, z}]
```
rotacional

Out[ ]=

$\{2\, x^2\, y + 2\, z^4,\ 3\, x\, z^2,\ -4\, x\, y\, z\}$

Particularizando para el punto P(1, -1, 1):

In[ ]:=
```
rotP = rot /. {x → 1, y → -1, z → 1}
```

Out[ ]=

{0, 3, 4}

Resulta el vector (0 i, 3 j, 4 k)