ESTUDIO DEL CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN

MOOC. UPV. Derivadas sucesivas y polinomio de Taylor. Video 22/28. UPV. Santiago Moll López.

DEFINICIÓN FUNCIÓN CRECIENTE

Se dice que una función real f es creciente sobre un conjunto S, si para todo par de x_1y x_2 de S de forma que
$x_1 < x_2$, se cumple que f $(x_1) \leqslant$f (x_2).

Se dice que una función real f es estrictamente creciente sobre un conjunto S, si para todo par de x_1 y x_2 de S
de forma que $x_1 < x_2$, se cumple que f $(x_1) <$ f (x_2).

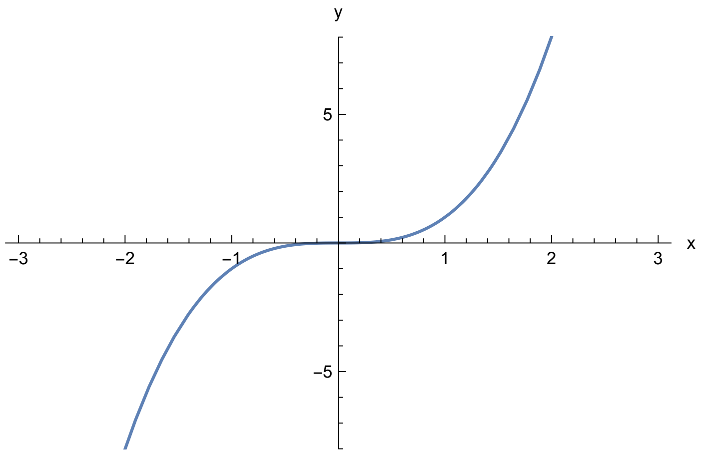
Ejemplo:

In[∘]:=
```
f[x_] = x^3
```

Out[∘]= x^3

In[∘]:=
```
Plot[f[x], {x, -3, 3}, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotRange → {-8, 8}]
```
representación gráfica — etiqueta de ejes — rango de representación

Out[∘]=



DEFINICIÓN FUNCIÓN DECRECIENTE

Se dice que una función real f es decreciente sobre un conjunto S, si para todo par de x_1y x_2 de S de forma que
$x_1 < x_2$, se cumple que f $(x_1) \geqslant$f (x_2).

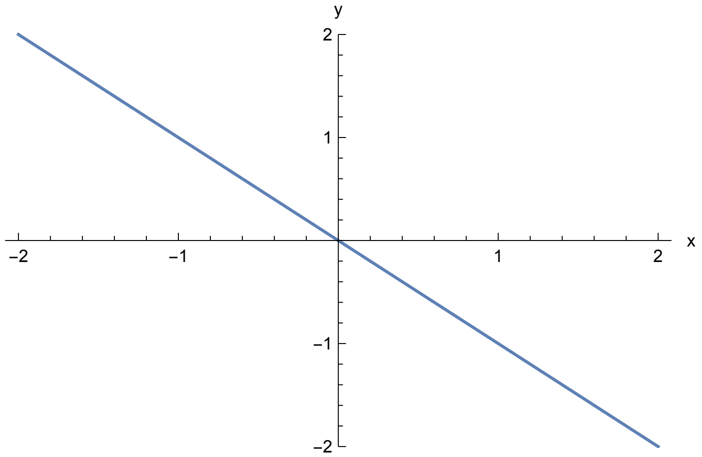
Se dice que una función real f es estrictamente decreciente sobre un conjunto S, si para todo par de x_1 y x_2 de S
de forma que $x_1 < x_2$, se cumple que f $(x_1) >$ f (x_2).

In[∘]:=
```
g[x_] = -x
```

Out[∘]= $-x$

```
In[•]:= Plot[g[x], {x, -2, 2}, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotRange → {-2, 2}]
        representación gráfica  etiqueta de ejes   rango de representación
```

Out[•]=



Ver cálculo de la recta tangente a una función.nb

TEOREMA

Si f es creciente en un intervalo abierto (a, b) y derivable en cualquier punto del intervalo entonces f ‘ (x) > = 0 para cualquier x ∈ (a, b).

Si f ‘ (x) > = 0 para todo x ∈ (a, b) entonces f es creciente en (a, b).

Si f es decreciente en un intervalo abierto (a, b) y derivable en cualquier punto del intervalo entonces f ‘ (x) < = 0 para cualquier x ∈ (a, b).

Si f ‘ (x) < = 0 para todo x ∈ (a, b) entonces f es decreciente en (a, b).

Procedimiento para estudiar el crecimiento/decrecimiento de una función

1.- Derivamos la función f (x).
2.- Igualamos a cero la derivada y resolvemos la ecuación.
3.- Estudiamos el signo de la derivada en función de los valores obtenidos y teniendo en cuenta el dominio.

Ejemplo:

Determinar dónde es creciente y decreciente la función h (x) = x^3 - 3x + 1

Paso 1: Derivamos la función.

In[•]:= $h[x\_] = x^3 - 3x + 1$

Out[•]= $1 - 3x + x^3$

In[•]:= `h'[x]`

Out[•]= $-3 + 3x^2$

Paso 2: Igualamos la derivada a cero y resolvemos:

```
In[•]:= Solve[h'[x] == 0, x]
        resuelve
```

Out[•]= {{x → -1}, {x → 1}}

Paso 3: Estudiamos el signo de la derivada. Consideramos tres intervalos:

1.- (- ∞, -1)

2.- (-1, 1)
3.- (1, + ∞)

Tomamos un valor al azar dentro de cada uno de los intervalos, el más sencillo posible. Por ejemplo, x = - 2, x = 0 y x = 2. Calculamos la derivada f ‘ (x) en cada uno de los valores.

In[∘]:=
```
h'[-2]
```
Out[∘]= 9

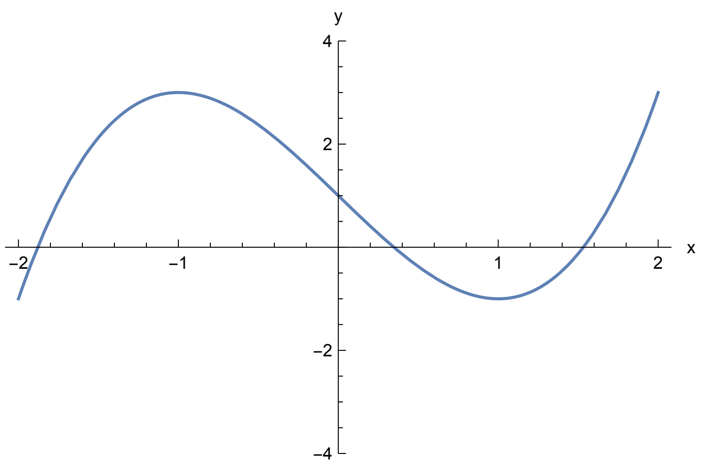
In[∘]:=
```
h'[0]
```
Out[∘]= -3

In[∘]:=
```
h'[2]
```
Out[∘]= 9

Por lo tanto tenemos:
- La función es creciente en el intervalo (-∞, -1)
- La función es decreciente en el intervalo (-1, 1)
- La función es creciente en el intervalo (1, + ∞)

Para verlo, representamos gráficamente la función:

In[∘]:=
```
Plot[h[x], {x, -2, 2}, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotRange → {-4, 4}]
```
representación gráfica — etiqueta de ejes — rango de representación

Out[∘]=


Nota:
Al realizar la descomposición de la recta en intervalos en los cuales la derivada no cambia de signo, tenemos que añadir siempre los valores que no están en el dominio de la función. Puede que la derivada cambie de signo en dichos puntos.