CÁLCULO DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

UPV. MOOC. Derivadas. Cálculo de máximos y mínimos de una función. Video 27/28 y 28/28.
UPV. Santiago Moll López.

Procedimiento para el cálculo de extremos relativos

1.- Se calcula la derivada de la función f (x), es decir f ‘(x).

2.- Resolvemos la ecuación f ‘(x) = 0. Los puntos solución y los puntos en los que no exista la derivada, se denominan puntos críticos de f (x).

3.- Calculamos f ‘’ (x).

4.- Sustituimos los puntos críticos en la segunda derivada.

Entonces:

- Si f ‘’(a) > 0 entonces la función alcanza un mínimo relativo en el punto x = a y el valor del mínimo es en el punto (a, f (a)).
- Si f ‘’(a) < 0 entonces la función alcanza un máximo relativo en el punto x = a y el valor del máximo es en el punto (a, f (a)).
- Si f ‘’(a) = 0, se utiliza el criterio de la primera derivada.

Ejemplo 1:

Calcula los máximos y mínimos relativos de la función: f (x) = $3x^4 - 6x^2$

Solución:

In[1]:= `f[x_] = 3 x^4 - 6 x^2`

Out[1]= $-6 x^2 + 3 x^4$

Calculamos los valores críticos de la función volumen, para ello calculamos la primera derivada:

In[2]:= `f'[x]`

Out[2]= $-12 x + 12 x^3$

Igualamos a cero y despejamos:

In[3]:= `Solve[f'[x] == 0, x]`
resuelve

Out[3]= $\{\{x \to -1\}, \{x \to 0\}, \{x \to 1\}\}$

Hemos obtenido tres puntos críticos, cómo sabemos si hay máximo o mínimo. Calculamos la segunda derivada:

In[4]:= `f''[x]`

Out[4]= $-12 + 36 x^2$

Sustituimos los valores críticos en la segunda derivada:

In[5]:= `f''[-1]`

Out[5]= 24

In[6]:= `f[-1]`

Out[6]= -3

En este caso hay un mínimo para el punto (- 1, -3)

In[7]:= `f''[0]`

Out[7]= −12

In[8]:= `f[0]`

Out[8]= 0

En este caso hay un máximo para el punto (0, 0)

In[9]:= `f''[1]`

Out[9]= 24

In[10]:= `f[1]`

Out[10]= −3

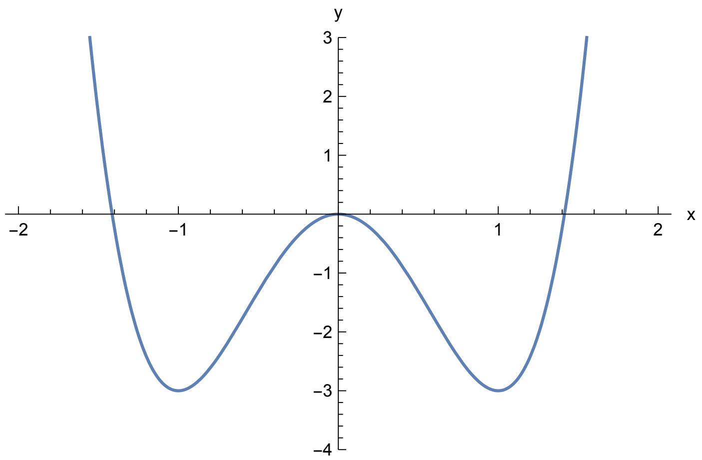
En este caso hay un mínimo para el punto (1, 0)

Representamos la función para ver como es:

In[11]:= `Plot[f[x], {x, -2, 2}, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotRange → {-4, 3}]`

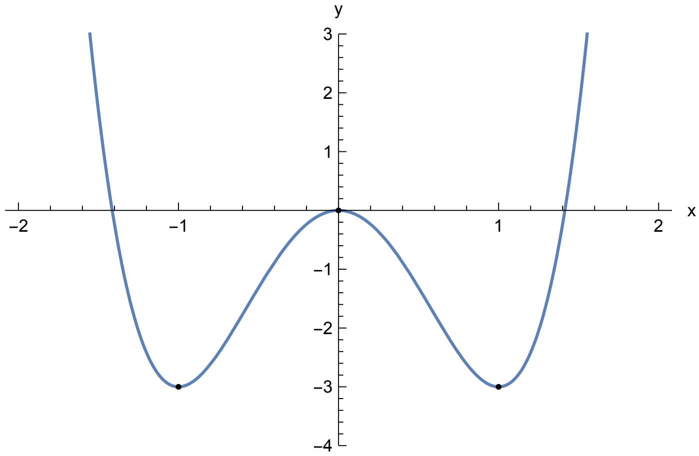
representación gráfica | etiqueta de ejes | rango de representación

Out[11]=



Si añadimos los puntos críticos:

In[12]:=
```
Show[Plot[f[x], {x, -2, 2}, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotRange → {-4, 3}],
⌊mues· ⌊representación gráfica     ⌊etiqueta de ejes      ⌊rango de representación
 Graphics[{Thick, Point[{-1, f[-1]}],
 ⌊gráfico  ⌊grueso ⌊punto
   {Thick, Point[{0, f[0]}], Thick, Point[{1, f[1]}]}}]]
   ⌊grueso ⌊punto            ⌊grueso ⌊punto
```

Out[12]=


Ejemplo 2:

Calcula los máximos y mínimos relativos de la función: $g(x) = (x+1)\, e^{2x}$

Solución:

Escribimos la función:

In[14]:=
```
g[x_] = (x + 1) e^(2 x)
```

Out[14]= $e^{2x}\,(1 + x)$

Calculamos la primera derivada:

In[15]:=
```
g'[x]
```

Out[15]= $e^{2x} + 2\, e^{2x}\,(1 + x)$

Igualamos la primera derivada a cero y resolvemos:

In[16]:=
```
Solve[g'[x] == 0, x]
⌊resuelve
```

Out[16]= $\left\{\left\{x \to -\frac{3}{2}\right\}\right\}$

Obtenemos un solo punto crítico. La función es derivable en todos los puntos, por tanto no necesitamos añadir ningún punto más. Para saber si es máximo o mínimo tenemos que calcular la segunda derivada.

In[17]:=
```
g''[x]
```

Out[17]= $4\, e^{2x} + 4\, e^{2x}\,(1 + x)$

Sustituimos el punto crítico en la segunda derivada:

In[18]:=
```
g''[-3/2]
```

Out[18]= $\frac{2}{e^3}$

In[19]:=
```
g[-3/2]
```

Out[19]= $-\frac{1}{2\, e^3}$

Luego hay un mínimo en (- 3/2, - 1/2 e^3). Para verlo gráficamente:

In[22]:=
```
Show[Plot[g[x], {x, -3, -1}, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotRange → {0, -0.030}],
 Graphics[{Thick, Point[{-3/2, g[-3/2]}]}]]
```

mues· | representación gráfica | etiqueta de ejes | rango de representación | gráfico | grueso | punto

Out[22]=