ALGEBRA LINEAL

Los valores propios de una matriz **m** son los valores **Subscript[λ, i]** para los cuales se pueden encontrar vectores **Subscript[v, i]** distintos de cero tales que **m.Subscript[v, i]==Subscript[λ, i] Subscript[v, i]**. Los vectores propios son los vectores **Subscript[v, i]**.

El polinomio característico **CharacteristicPolynomial[m,x]** para una matriz n*n está dado por **Det[m-x IdentityMatrix[n]]**. Los valores propios son las raíces de este polinomio.

Encontrar los valores propios de una matriz n*n implica, en general, resolver una ecuación polinómica de grado n-ésimo. Por lo tanto, para n > = 5, los resultados no pueden expresarse únicamente en términos de radicales explícitos. No obstante, siempre se pueden usar objetos raíz, aunque, salvo en matrices bastante dispersas o simples, las expresiones obtenidas suelen ser extremadamente complejas.

Valores propios y vectores propios

EigenValues [m]
Da una lista de los valores propios de **m**.

EigenValues [N[m]], etc
Da una lista de los valores propios de **m** en número.

EigenValues [N[m, p]], etc
Da una lista de los valores propios de **m** en número, comenzando con p-dígitos de precisión.

EigenVectors [m]
Da una lista de los vectores propios de **m**.

EigenSystem [m]
Da una lista de la forma *{valores propios, vectores propios}*

CharacteristicPolynomial[m, x]
Da la característica polinómica de **m**.

Ejemplos:

In[◦]:=
```
Clear["Global`*"]
```
borra

Incluso para una matriz tan simple como esta, la forma explícita de los valores propios es bastante complicada:

In[◦]:=
```
Eigenvalues[{{a, b}, {-b, 2 a}}]
```
autovalores

Out[◦]=

$$\left\{\frac{1}{2}\left(3\,a-\sqrt{a^2-4\,b^2}\right),\ \frac{1}{2}\left(3\,a+\sqrt{a^2-4\,b^2}\right)\right\}$$

Si proporciona una matriz de números reales aproximados, el lenguaje Wolfram encontrará los valores propios y vectores propios numéricos aproximados.

Una matriz de dos por dos:

In[∘]:=
```
m = {{2.3, 4.5}, {6.7, -1.2}};
MatrixForm[m]
```
forma de matriz

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2.3 & 4.5 \\ 6.7 & -1.2 \end{pmatrix}$$

La matriz tiene dos valores propios, en este caso ambos reales:

In[∘]:=
```
Eigenvalues[m]
```
autovalores

Out[∘]=
```
{6.31303, -5.21303}
```

Los vectores propios de m:

In[∘]:=
```
Eigenvectors[m]
```
autovectores

Out[∘]=
```
{{0.746335, 0.66557}, {-0.513839, 0.857886}}
```

Eigensystem calcula los valores propios y los vectores propios simultáneamente. El resultado es una asignación de valores propios a **vals** y los vectores propios a **vecs**.

In[∘]:=
```
{vals, vecs} = Eigensystem[m]
```
autovalores y autovect

Out[∘]=
```
{{6.31303, -5.21303}, {{0.746335, 0.66557}, {-0.513839, 0.857886}}}
```

Esto verifica que el primer valor propio y vector propio satisfacen la condición apropiada:

In[∘]:=
```
m.vecs[[1]] == vals[[1]] × vecs[[1]]
```

Out[∘]=
```
True
```

Esto determina los valores propios de una matriz aleatoria de 4 por 4. En matrices asimétricas, los valores propios pueden tener partes imaginarias:

In[∘]:=
```
Eigenvalues[Table[RandomReal[], {4}, {4}]]
```
autovalores tabla real aleatorio

Out[∘]=
```
{1.1997 + 0. i, 0.602826 + 0. i, -0.102916 + 0.285846 i, -0.102916 - 0.285846 i}
```

La función “**Eigenvalues**” siempre proporciona una lista de n valores propios para una matriz n*n. Los **Eigenvalues** corresponden a las raíces del polinomio característico de la matriz y no necesariamente son distintos. “**Eigenvectors**”, por otro lado, proporciona una lista de vectores propios cuya independencia está garantizada. Si el número de estos **Eigenvectores** es menor que n, “**Eigenvectors**” complementa la lista con cero vectores, de modo que la longitud total de la lista siempre es n.

Definimos una matriz de 3 por 3:

In[ ]:=
```
mz = {{0, 1, 0}, {0, 0, 1}, {0, 0, 0}};
MatrixForm[mz]
```
forma de matriz

Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz **mz** tiene tres valores propios, todos iguales a cero:

In[ ]:=
```
Eigenvalues[mz]
```
autovalores

Out[ ]=
```
{0, 0, 0}
```

Sin embargo, solo hay un vector propio independiente para la matriz. **Eigenvectors** añade dos vectores cero para obtener un total de tres vectores en este caso:

In[ ]:=
```
Eigenvectors[mz]
```
autovectores

Out[ ]=
```
{{1, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}
```

Esto da el polinomio característico de la matriz:

In[ ]:=
```
CharacteristicPolynomial[mz, x]
```
polinomio característico

Out[ ]=

$-x^3$

Encontrar los valores propios más grandes y más pequeños

Eigenvalues [m, k]

Da una lista de los **k** valores propios más grandes de **m**.

Eigenvectors [m, k]

Da una lista de los **k** vectores propios más grandes de **m**.

Eigensystem [m, k]

Da una lista de los **k** valores propios más grandes con sus vectores propios correspondientes.

Eigenvalues [m, -k]

Da una lista de los **k** valores propios más pequeños de **m**.

Eigenvectors [m, -k]

Da una lista de los **k** vectores propios más pequeños de **m**.

Eigensystem [m, -k]

Da una lista de los **k** valores propios más pequeños con sus vectores propios correspondientes.

Los Eigenvalues ordenan los valores propios numéricos de modo que los de mayor valor absoluto aparezcan primero. En muchas situaciones, puede que solo le interese el mayor o el menor valor de una matriz. Puede obtenerlos eficientemente utilizando Eigenvalues [m,k] y Eigenvalues [m,-k].

Calcula los valores propios exactos de una matriz entera:

In[ ]:=
```
Eigenvalues[{{1, 2}, {3, 4}}]
```
autovalores

Out[ ]=

$$\left\{\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{33}\right), \frac{1}{2}\left(5-\sqrt{33}\right)\right\}$$

Los valores propios se ordenan en orden decreciente de tamaño:

In[ ]:=
```
N[%]
```
valor numérico

Out[ ]=
```
{5.37228, -0.372281}
```

Esto da los tres valores propios con mayor valor absoluto:

In[ ]:=
```
Eigenvalues[Table[N[Tan[i / j]], {i, 10}, {j, 10}], 3]
```
autovalores tabla ··· tangente

Out[ ]=
```
{10.044 + 0. i, 2.94396 + 6.03728 i, 2.94396 - 6.03728 i}
```

Valores propios, vectores propios y característica polinómica

Eigenvalues [m, a]

Generalización de los valores propios de **m** con respecto a **a**.

Eigenvectors [m, a]

Generalización de los vectores propios de **m** con respecto a **a**.

Eigensystem [m, a]

El sistema propio generalizado de **m** con respecto a **a**.

CharacteristicPolynomial[{m, a}, x]

El polinomio característico generalizado de **m** con respecto a **a**.

Los valores propios generalizados para una matriz **m** con respecto a una matriz **a** se definen como aquellos **Subscript[λ, i]** para los cuales **m.Subscript[v, i]==Subscript[λ, i]a.Subscript[v, i]**.

Los valores propios generalizados corresponden a ceros del polinomio característico generalizado **Det[m-x a]**.

Tenga en cuenta que, si bien los valores propios matriciales ordinarios siempre tienen valores definidos, algunos valores propios generalizados siempre serán indeterminados si el polinomio característico generalizado se anula, lo cual ocurre si **m** y **a** comparten un espacio nulo. Tenga en cuenta también que los valores propios generalizados pueden ser infinitos.

Ejemplos:

Estas dos matrices comparten un espacio nulo unidimensional, por lo que un valor propio generalizado es indeterminado:

In[ ]:=
```
Eigenvalues[{{{1.5, 0}, {0, 0}}, {{2, 0}, {1, 0}}}]
```
autovalores

Out[ ]=
```
{0., Indeterminate}
```

Esto da un polinomio característico generalizado:

In[ ]:=
```
CharacteristicPolynomial[{{{1.5, 0}, {0, 1}}, {{2, 0}, {1, 0}}}, x]
```
polinomio característico

Out[ ]=
```
1.5 - 2. x
```